



TITLE:

On F

AUTHOR(S):

黒川, 信重

CITATION:

黒川, 信重. On F. 代数幾何学シンポジウム記録 1994, 1994: 38-46

ISSUE DATE:

1994

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/214618>

RIGHT:

$\mathcal{O}_M \quad \mathbb{F}_1$

東京工大・黒川 信重

(Nobushige Kurokawa)

Dept of Math., Tokyo Institute of Tech.

① 動機 (Motivation)

「リーマン予想をゼータ関数の零点と極のテンソル積構造を用いて証明せよ。」 (Prove the Riemann hypothesis using the (absolute) tensor product structure of zeros and poles of zeta functions.)

ここで テンソル積構造とは

「 $\zeta(s_1, M_1) = 0, \infty$ かつ $\zeta(s_2, M_2) = 0, \infty \Rightarrow \zeta(s_1 + s_2, M_1 \otimes M_2) = 0, \infty$ 」
を指す。考えを固定するためには, M_1, M_2 は $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の有限型スキームとし, ゼータ関数は ハッセ-ヴェイユのゼータ関数とする:

$$\zeta(s, M) = \prod_{\substack{m \in |M| \\ \text{閉点}}} (1 - N(m)^{-s})^{-1},$$

$$N(m) = \#(\text{剰余体}).$$

たとえば,

$$\zeta(s, \text{Spec } \mathbb{Z}) = \zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} \text{ はリーマンのゼータ関数.}$$

グロタンディークにより発見された \mathbb{F}_p 上の相対テンソル積構造は ドリーニェリによるヴェイユ予想 (\mathbb{F}_p 上のリーマン予想) の証明に使われた。

グロタンディークの積構造は

$$\zeta(s, M_1 \otimes_{\mathbb{F}_p} M_2) = \prod_{m=0}^{\infty} \det \left(1 - \text{Frob}(p) \bar{p}^{-s} \middle| H^m(M_1 \otimes_{\mathbb{F}_p} M_2) \right)^{(-1)^{m+1}}$$

$$= \prod_{m_1, m_2} \det \left(1 - \text{Frob}(p) \bar{p}^{-s} \middle| H^{m_1}(M_1) \otimes H^{m_2}(M_2) \right)^{(-1)^{m_1+m_2+1}}$$

である。(コホモロジーはイタルコホモロジーやクリスタルコホモロジーなど)

トリニエによる証明は

「 $\zeta(s, M) = 0, \infty$ かつ $\frac{m-1}{2} \leq \text{Re}(s) \leq \frac{m+1}{2}$ に対して成り立っているとき (あるいは s が m 次元コホモロジーの固有値から来ているとき) $\text{Re}(s) = \frac{m}{2}$ 」を示すことに帰着する。

テンソル積構造を用いると $\zeta(ns, M^{\otimes n}) = 0, \infty$ ($n=1, 2, \dots$)

であり (ns は mn 次元コホモロジーの固有値から来ている)

$$\frac{mn-1}{2} \leq \text{Re}(ns) \leq \frac{mn+1}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

が示される。これから

$$\frac{m}{2} - \frac{1}{2n} \leq \text{Re}(s) \leq \frac{m}{2} + \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成立し、

$$\text{Re}(s) = \frac{m}{2}$$

を得る。

この方法をリーマン-ゼータ関数 $\zeta(s) = \zeta(s, \text{Spec } \mathbb{Z})$ に適用しようとする、通常のテンソル積では

$$\text{Spec } \mathbb{Z} \otimes \text{Spec } \mathbb{Z} = \text{Spec } \mathbb{Z}$$

となってしまう、うまくいかない。"Spec $\mathbb{Z} \otimes \text{Spec } \mathbb{Z}$ " が 2次元となるような "テンソル積" が必要になる。

これが、ここで考えようとする "最小体" ("1元体" ...)

\mathbb{F}_1 ("零体"とも呼ばれる) 上のテンソル積 (絶対テンソル積) の起源である。

解析的には

$$Z_1(s) = \prod_p (p-s)^{m_1(p)},$$

$$Z_2(s) = \prod_p (p-s)^{m_2(p)}$$

に対して (積は正規化積)

$$Z_1(s) \otimes Z_2(s) = \prod_{p_1, p_2} (p_1 + p_2 - s)^{m_1(p_1)m_2(p_2)\text{sgn}(p_1, p_2)}$$

と構成される $([2], [3], \dots)$ 。ここで、

$$\text{sgn}(p_1, p_2) = \begin{cases} 1 & \dots & \text{Im } p_1, \text{Im } p_2 \geq 0 \\ -1 & \dots & \text{Im } p_1, \text{Im } p_2 < 0 \\ 0 & \dots & \text{その他} \end{cases}$$

$$\text{これは } \zeta(s, \mathbb{F}_{q_1}) = (1 - q_1^{-s})^{-1}, \zeta(s, \mathbb{F}_{q_2}) = (1 - q_2^{-s})^{-1}$$

から構成される $\zeta(s, \mathbb{F}_{q_1}) \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_{q_2})$ の場合でも非自明な位数 2 の二重双曲サイン(正弦)関数となる。
([3] - [9])

② \mathbb{F}_1 とは?

Professor Manin [1] introduced the one element field \mathbb{F}_1 in 1991/92 as the constant field of \mathbb{Z} . He introduced the category of \mathbb{F}_1 -motives (= absolute motives) also. If we believe in \mathbb{F}_1 , then we can (or "should") prove the Riemann hypothesis, Langlands conjectures, and the Fermat conjecture.

定義 1. $\mathbb{F}_1 = \{1\}$. (1元体)

定義 2. $\mathbb{F}_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \mathbb{F}_q$.

(\mathbb{F}_q を「量子体」と思えば、準古典極限)
Semi-classical limit

定義 3. $\text{Mod}(\mathbb{F}_1) = \underline{\text{Set}}$.

($[\mathbb{F}_1 \text{ 加群の圏}] = [\text{集合の圏}]$)

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_1(X) & \longleftarrow & X \end{array}$$

ゼータ関数は 圏の言葉でうまく扱える。Spec \mathbb{Z} 上有限型のスキーム M のハッセ・ウェイル・ゼータ関数は、連接層の圏 $\text{Coh}(M)$ のゼータと見ることが自然であり、

$$\zeta(s, \text{Coh}(M)) = \prod_{p \in \text{Simple}(\text{Coh}(M))} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

かつ $\zeta(s, M)$ となる。ここで $\text{Simple}(\text{Coh}(M))$ は単純対象の同値類全体であり、 $N(p) = \# \text{End}(p)$ 。ただし

$$\zeta(s) = \zeta(s, \text{Spec } \mathbb{Z}) = \zeta(s, \text{Mod}(\mathbb{Z})) = \zeta(s, \underline{\text{Ab}}).$$

(今の場合、有限型条件は重要でない。)

この解釈によつて、セータ関数の特殊値に関する
リヒテンバウムやバインソンの予想は K 群から
④の K 群として自然に出てくることから

$$\zeta(s, c) = \# K_s(c)$$

という ④に 関する 等式の形の予想と
考へることが出来る。

この観点からすると 定義3は自然に思える。
さらに、

$$\text{Mod}(\mathbb{Z}) = \underline{Ab} \longrightarrow \underline{Set} = \text{Mod}(\mathbb{F}_1)$$

という忘却関手によつて \mathbb{Z} は \mathbb{F}_1 -代数の
ように思うことができる。したがつて、 \mathbb{Z} の “定数体”
とも思うことができよう。

③ いくつかの性質

$$(1) \boxed{GL_n(\mathbb{F}_1) = S_n}$$

$$\begin{aligned} (\text{註}) \quad GL_n(\mathbb{F}_1) &= \text{Aut}_{\text{Mod}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{F}_1^n) \\ &= \text{Aut}_{\underline{Set}}(\{1, \dots, n\}) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

さらに一般に

$$GL(\mathbb{F}_1^{(X)}) \cong S(X) \quad (\text{対称群}).$$

$$(2) \boxed{\# \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_1) = n.}$$

さらに一般に $\# \{ \mathbb{F}_1^n \text{ の } i\text{-次元部分空間} \} = \binom{n}{i}.$

$$\begin{aligned}
 (\text{註}) \quad & \# \{ \mathbb{F}_1^n \text{ の } i\text{-次元部分空間} \} \\
 &= \# \{ \{1, \dots, n\} \text{ の } i\text{-元部分集合} \} \\
 &= \binom{n}{i}.
 \end{aligned}$$

(註) 定義 2 からの言証明は

$$\# \{ \mathbb{F}_q^n \text{ の } i\text{-次元部分空間} \} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[i]_q! [n-i]_q!}$$

(ガウスの 2 項係数)

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし } [n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q \text{ で,} \\ [x]_q = \frac{q^x - 1}{q - 1} \text{ は } q \text{ 類似} \end{array} \right)$$

から $q \rightarrow 1$ とすればよい。

$$(3) \quad \boxed{\# \mathbb{F}_1 = 1 + \frac{\log \infty}{\infty}}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{註}) \quad \# \mathbb{F}_1 &= (\# M_n(\mathbb{F}_1))^{\frac{1}{n^2}} \\
 &= (\# \text{End}_{\text{Mod}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{F}_1^n))^{\frac{1}{n^2}} \\
 &= (\# \text{End}_{\text{Set}} \{1, \dots, n\})^{\frac{1}{n^2}} \\
 &= n^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{\log \infty}{\infty}.
 \end{aligned}$$

(4) 射影空間

$$\begin{array}{ll}
 \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_1) & \text{---} \\
 \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_1) & \triangle \\
 \vdots & \\
 \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2) & \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\
 \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) & \begin{array}{c} \triangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ \triangle \end{array}
 \end{array}$$

(5) 微分

$\text{Der}(\mathbb{Z}/\mathbb{F}_1) \cong \mathbb{Z}^P$ 直積 ($P = \{2, 3, 5, \dots\}$ 素数全体).

$\Omega^1(\mathbb{Z}/\mathbb{F}_1) \cong \mathbb{Z}^{(P)}$ 直和.

(証明) \mathbb{F}_1 -線型性は自動的に満たされる.

注意1 $\text{Der}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_1) = 0$, $\Omega^1(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_1) = 0$.

注意2 伊原先生 ([2]) による数の微分:

$a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ に対して

$$d(a) = (d(a)_p)_{p \in P},$$

$$d(a)_p = \left[\frac{a - a^p}{p} \text{ in } \mathbb{F}_p \right],$$

は, \mathbb{Z} の微分とうまく合っているように思われる.

さらに, 予想

$$\#\{p \leq x \mid d(a)_p = 0\} \sim \log \log x$$

を仮定すれば $\text{Spec } \mathbb{Z}$ を $\text{Spec } \mathbb{F}_1$ 上の曲線と見たときの種数は $\log \log \infty$ ということになると思われる.

(6) 代数閉包

$\overline{\mathbb{F}_1}$ は どう考えればよいだろうか? たぶん

$$\text{Mod}(\overline{\mathbb{F}_1}) = \{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \mid X_i: \text{集合}\}$$

といふ, 自然な射 (可換全像列) をとったものは

どうだろうか? 一方, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_1}/\mathbb{F}_1)$ は

$$\lim_{q \rightarrow 1} \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \text{ と考えれば } \widehat{\mathbb{Z}} \text{ (これは } \overline{\mathbb{F}_1} \neq \overline{\mathbb{F}_1})$$

であろうが, $n > 1$ に対して

$\# \{ \mathbb{F}_q[X] \text{ の } n\text{-次の既約モニック多項式} \}$ を

$$\lim_{q \rightarrow 1} \# \{ \mathbb{F}_q[X] \text{ の } n\text{-次の既約モニック多項式} \}$$

$$= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

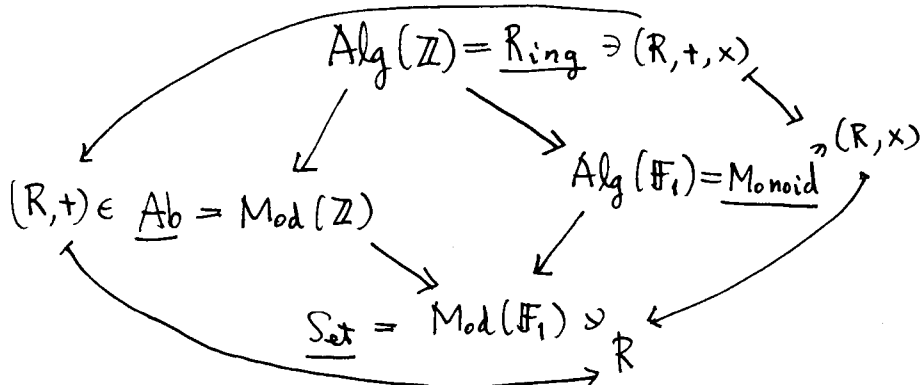
$$= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= 0$$

と考えると $\overline{\mathbb{F}_1} = \mathbb{F}_1$ とも思われるかも知れない。

(7) \mathbb{F}_1 -スキーム

代数の圏と加群の圏については次の図が考えられる。



これから, \mathbb{F}_1 -スキームはモノイドのスキームを意味すると思われ, トーラス多様体や代数スキームの言に結びつくと考えられる。

文献

- [1] Yu. I. Manin "Lectures on zeta functions and motives"
1991-1992 (Max-Planck-Institute preprint 1992)
[Astérisque]
- [2] 伊原康隆 「Fermat 商と「数の生成」について」
『数理解析研究所講究録 810』 p. 324-341, 1992 年。
- [3] N. Kurokawa "On some Euler products (I)" Proc. Japan Acad. 1984
- [4] —: "Multiple zeta functions: an example"
Proc. Zeta Functions in Geometry 1990 August (Tokyo Inst. of Technology)
[Adv. Studies in Pure Math. 21]
- [5] N. Kurokawa "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 1991.
- [6] N. Kurokawa "Gamma factors and Plancherel measures"
Proc. Japan Acad. 1992
- [7] 黒川信重 "Lectures on multiple sine functions"
(黒川信重氏による) —ト) 1991 年 4 月-7 月, 東京大学。
- [8] 黒川信重 「ゼータ関数の行列式表示とテンソル積」
『数理解析研究所講究録 810』 p. 305-317, 1992 年。
- [9] 黒川信重 「ゼータは生きている——類体論から霊体論へ——」
『あふない数学』(朝日ワンテママガジン) 朝日新聞社,
1995 年 1 月 7 日。